С. В. Марвин
ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина» (г. Екатеринбург, Россия)

СИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ОБОБЩЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ НЕФЕРРОМАГНИТНОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТЕЛА С ДЕФЕКТАМИ

Немалая практическая значимость нестационарных задач электродинамики (задач, предполагающих негармоническую зависимость электромагнитного поля от времени) обусловлена в первую очередь внедрением энергосберегающих технологий в горнодобывающую промышленность (в частности, ее нефтегазовую отрасль), а также в производство готовых металлических изделий. Нестационарные методы поиска руды, импульсные методы толщинометрии нефтепроводов и газопроводов, а также нестационарные методы дефектоскопии готовой металлической продукции — конкретные примеры практических приложений нестационарных краевых (начально-краевых) задач электродинамики для проводящих тел и сред.

Только в крайне редких случаях можно получить аналитически точное решение начально-краевой задачи для уравнений Максвелла. Обычно можно говорить только о приближенном ее решении. Для разработки алгоритмов приближенного решения любой задачи математической физики первоочередную важность имеет доказательство ее корректности, в частности, доказательство существования и единственности ее решения.

При достаточно сильных предположениях относительно гладкости границы проводящего тела, а также гладкости его электропроводности как функции пространственных координат, можно доказать существование классического решения начально-краевой задачи электродинамики при нулевых начальных условиях (классическим решением называют решение, непрерывно дифференцируемое в обычном смысле) [1, 2]. Однако в целях наибольшей общности рассмотрения необходимо изучить начально-краевую задачу электродинамики для тела, ограниченного не гладкой, а кусочно-гладкой поверхностью. Причем на границе тела и границах дефектов, находящихся внутри проводящего тела, должно происходить скачкообразное изменение электропроводности (что означает негладкую зависимость электропроводности от пространственных координат). Границы дефектов, в общем случае, могут быть кусочно-гладкими. И в целях общности рассмотрения можно отказаться от классического решения, определив подходящим образом решение обобщенное.

Для неферромагнитного металлического тела система уравнений Максвелла имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{rot}\mathcal{H} - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r})\mathcal{E} - \dfrac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \\ \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathcal{E} \end{cases}, \qquad (1)$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ – напряженности соответственно электрического и магнитного поля;

ε_0 и μ_0 - диэлектрическая и магнитная постоянные;

σ - электропроводность;

$\boldsymbol{r}$ - совокупность пространственных координат (x, y, z);

t - время;

j - плотность стороннего электрического тока.

Предполагается, что металлическое тело занимает ограниченную область Ω, а дефекты - непересекающиеся замкнутые области внутри Ω. $\sigma(\boldsymbol{r})$ неотрицательна, причем равна нулю снаружи Ω. Как функция пространственных координат $\sigma(\boldsymbol{r})$ терпит конечные разрывы на границе металлического тела и границах дефектов; во всех остальных точках тела и дефектов функция $\sigma(\boldsymbol{r})$ предполагается непрерывной.

Сторонний ток занимает ограниченную область пространства T (снаружи T плотность стороннего тока равна нулю). При $t \geq 0$ векторная функция $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ непрерывна по пространственным переменным в замкнутой области $\overline{T}$ (которая получается из T присоединением границы) и дважды непрерывно дифференцируема по времени. Причем в начальный момент времени $t=0$ плотность стороннего тока равна нулю (то есть ток выключен). Следует заметить, что указанные условия непрерывности и гладкости $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ на практике всегда выполняются.

В рассматриваемой начально-краевой задаче функции $\sigma(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ должны быть известны (заданы). Напряженности $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ являются неизвестными векторными функциями, которые нужно найти, решив систему уравнений (1) в совокупности с граничными и начальными условиями.

Граничные условия для функций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ накладываются на границе тела и границах дефектов. Это условия сопряжения для двух сред, не являющихся идеальными проводниками:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{\tau,\mathrm{int}} = \mathcal{E}_{\tau,\mathrm{ext}} \\ \mathcal{H}_{\tau,\mathrm{int}} = \mathcal{H}_{\tau,\mathrm{ext}} \end{cases}, \qquad (2)$$

где τ - обозначение касательной составляющей векторного поля на границе области (в точках гладкости границы);

int и ext - обозначение предела соответственно изнутри и снаружи области.

В начальный момент времени $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ должны удовлетворять начальным условиям:

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\boldsymbol{r},0) = \mathcal{E}_0(\boldsymbol{r}) \\ \mathcal{H}(\boldsymbol{r},0) = \mathcal{H}_0(\boldsymbol{r}) \end{cases}, \qquad (3)$$

причем $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{H}_0$ должны удовлетворять граничным условиям (2).

Обозначим как $\boldsymbol{L}_2(\mathrm{R}^3)$ множество векторных функций переменных (x,y,z), квадратично суммируемых во всем трехмерном пространстве R^3; в этом пространстве норма любой векторной функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ определяется по следующей формуле:

$$\|\boldsymbol{u}\|_2 = \sqrt{\int_{\mathrm{R}^3} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})|^2 \, d\boldsymbol{r}} . \qquad (4)$$

Обозначим как $\boldsymbol{D}$ множество бесконечно дифференцируемых финитных векторных функций переменных (x,y,z) (финитность функции означает, что она отлична от нуля только на ограниченном множестве).

В обобщенной постановке начально-краевой задачи (1) - (3) целесообразно задействовать определение обобщенного ротора (подобное определению обобщенной производной): векторная функция $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}_2(\mathrm{R}^3)$ называется обобщенным ротором векторной функции $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_2(\mathrm{R}^3)$, если для любой $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{D}$ выполняется интегральное равенство

$$\int_{\mathrm{R}^3} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \mathrm{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) dV = \int_{\mathrm{R}^3} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) dV$$

где $dV = dxdydz$.

Множество векторных функций из $\boldsymbol{L}_2(\mathrm{R}^3)$, имеющих обобщенные роторы, обозначим как $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot}, \mathrm{R}^3)$.

Роль пространства $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot}, \mathrm{R}^3)$ для рассматриваемой начально-краевой задачи разъясняется следующим образом. Предположим, что $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}_2(\mathrm{R}^3)$, причем функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ непрерывно дифференцируема во всех точках R^3, кроме границы области Ω и границ ее подобластей-дефектов. Предположим также, что функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ и ее первые производные допускают непрерывное продолжение на границу Ω изнутри и снаружи этой области, а также допускают аналогичные продолжения на границы подобластей-дефектов. Но результаты непрерывных продолжений $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ изнутри и снаружи - разные, то есть на границе Ω и на границах дефектов функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ терпит разрывы. Тогда можно доказать следующее утверждение: из условия $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{rot}, \mathrm{R}^3)$ следует, что для функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ выполняются граничные условия вида (2).

Однако следует заметить, что пространство $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot}, \mathrm{R}^3)$ достаточно широкое и также включает в себя квадратично суммируемые и непрерывно дифференцируемые векторные функции. С другой стороны, $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot}, \mathrm{R}^3)$ содержит некоторые функции, не имеющие производных и терпящие разрывы не только на границах раздела рассматриваемых сред, но и в самих средах (в дефектах; снаружи Ω; в бездефектной подобласти Ω).

Решение исследуемой начально-краевой задачи следует искать в пространстве $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot}, \mathrm{R}^3)$. То есть, функции $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ должны в любой момент времени $t \geq 0$ принадлежать пространству $\boldsymbol{H}(\mathrm{rot}, \mathrm{R}^3)$. Дифференцируемость по t следует понимать в смысле сходимости по квадратичной норме (4):

$$\left\| \frac{\boldsymbol{u}(t + \Delta t) - \boldsymbol{u}(t)}{\Delta t} - \boldsymbol{u}'(t) \right\|_2 \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0 . \tag{5}$$

Необычные определения ротора и производной по времени указывают на обобщенность постановки рассматриваемой начально-краевой задачи. Однако дифференцируемость по времени хотя бы в смысле формулы (5) означает, что решение исследуемой задачи, если оно существует, является сильным решением (по терминологии, принятой в теории дифференциальных уравнений в нормированных пространствах). Если у решения нет производной по времени даже в смысле формулы (5), то можно говорить только о слабом решении [3].

Систему уравнений (1) и начальные условия (3) можно записать в следующей векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\boldsymbol{r}) & \dfrac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{rot} \\ -\dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathcal{E}(0) \\ \mathcal{H}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{H}_0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{6}$$

где граничные условия (2) не записаны явно, потому что учтены условием $\mathcal{E}, \mathcal{H} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{rot}, \mathrm{R}^3)$.

Исследования системы (6) сопряжены с изучением свойств оператора A:

$$A\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\mathbf{r}) & \dfrac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{rot}\\ -\dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix},$$

Исследования свойств, связанных с замкнутостью, и спектральных свойств оператора A показывают, что для рассматриваемой начально-краевой задачи в указанной обобщенной постановке выполнены все условия теоремы существования и единственности сильного решения [3]. Для выполнения условий этой теоремы существенную роль играют также свойства функции $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$.

Также можно доказать, что для рассматриваемой начально-краевой задачи уравнение $\mathrm{div}\mathcal{H}=0$ является лишь ограничением на начальные условия: при $\mathrm{div}\mathcal{H}_0=0$ дивергенция напряженности магнитного поля будет равна нулю в любой момент времени $t>0$, что следует из основной системы уравнений (1) (только производные, входящие в выражение для дивергенции, следует понимать как обобщенные).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 13-01-00090.

Список использованных источников

1. Дякин В. В. и др. Система интегро-дифференциальных уравнений электродинамики и обратное преобразование Лапласа // Дефектоскопия. 2008. № 3. С. 30–36.
2. Марвин С. В. и др. Начально-краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца // Электричество. 2008. № 12. С. 30–36.
3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.